

# - Les analogies électro-mécano-acoustiques -

De la puce à l'oreille

Jean-Claude BODOT

A l'avènement de l'électricité, les rares électriciens de l'époque, comparaient ses effets en faisant des analogies avec les éléments mécaniques. Des termes tels que **force électromotrice**, **force contre électromotrice**, **tension électrique**, ... etc, toujours utilisées, en sont les témoins. Le comportement des composants, d'un circuit électrique excité par un courant alternatif, était analysé en faisant l'analogie avec des éléments mécaniques vibrants. L'inductance était alors comparée à une masse, la capacitance à une élasticité (appelée aussi compliance), la résistance à une résistance liée à un frottement. Des comparaisons avec les circuits hydrauliques avaient également lieu. Des termes comme **débit** et **courant** en sont des exemples concrets.

Il est remarquable de constater que l'ensemble de ces circuits, issus de milieux apparemment différents sont régis par un même système d'équations différentielles. C'est en identifiant les constantes et les variables de chacune des équations que nous aboutirons aux analogies.

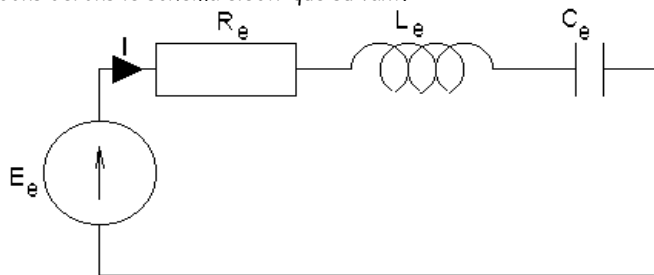
La connaissance des analogies est un outil formidable d'aide, à la compréhension, et à la modélisation. Puisque les éléments sont analogues, nous pouvons les représenter schématiquement en employant une unique symbolique. Par convention, et pour leur simplicité, ce sont les symboles électriques qui sont utilisés

Seules les analogies de type impédance seront développées, ce sont les plus courantes, et surtout les mieux adaptées, car à mon goût les plus faciles à interpréter, à la modélisation des éléments électroacoustiques.

Les expressions situées entre [...] sont les **équations aux dimensions** de la grandeur considérée. Elles contribuent à la vérification de l'homogénéité d'une équation.

## 2-1- Analogies électro mécaniques

Considérons le schéma électrique suivant.



L'équation de son circuit est :  $E_e = L_e \cdot d^2 Q / dt^2 + R_e \cdot dQ / dt + Q / C_e$   
dans laquelle:

$E_e$ , le générateur, de force électromotrice  $E_e$ , exprimée en volts (V) [ $M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot Q^{-1}$ ],

$I$ , l'intensité de courant qui circule dans la maille, exprimée en Ampères (A) [ $Q \cdot T^{-1}$ ],

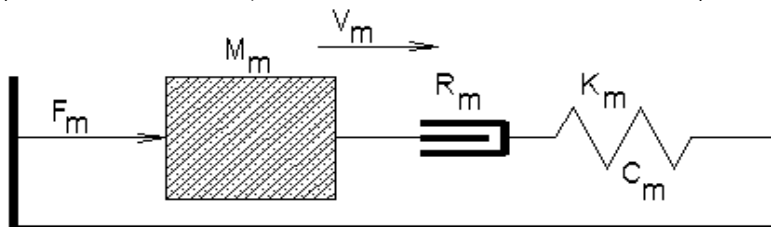
$Q$ , la quantité d'électricité, en Coulombs (C) [ $Q$ ].

$L_e$ , l'inductance, en Henry (H) [ $L^2 \cdot Q$ ]

$R_e$ , la résistance électrique, en Ohms ( $\Omega$ ) [ $M \cdot L^2 \cdot T^{-1} \cdot Q^{-2}$ ]

$C_e$ , la capacitance, en Farads (F). [ $M^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^2 \cdot Q^2$ ]

A partir du schéma mécanique suivant, où la référence des forces est représentée en trait gras,



L'équation du circuit mécanique constitué du générateur de force  $F_m$  exprimée en Newtons [ $M \cdot L \cdot T^{-2}$ ], appliquée en série à l'ensemble  $M_m$ ,  $R_m$  et une raideur  $K_m$ , s'écrit :  $F_m = M_m \cdot d^2 X / dt^2 + R_m \cdot dX / dt + K_m \cdot X$   
avec :

$X$  le déplacement, en mètres (m) [ $L$ ]

$M_m$  la masse mécanique (kg) [ $M$ ]

$R_m$  la résistance mécanique, en N/s ou Ohm mécanique [ $M \cdot T^{-1}$ ]

$K_m$  la raideur en N/m [ $M \cdot T^{-2}$ ]

(AN-1)

(AN-2)

L'inverse de la raideur est la compliance  $C_m = 1/K_m$  (AN-3)

Et ainsi interprétée AN-2 s'écrit:

$$F_m = M_m d^2 X / dt^2 + R_m dX / dt + X / C_m \quad (AN-4)$$

L'emploi de l'opérateur d'HEAVISIDE  $p = d/dt = j.\omega$  (pour un signal sinusoïdal), permet d'écrire:

A partir des relations AN-1 et AN-4:

$$E_{e(p)} = p^2 . L_e . Q + p . R_e . Q + Q / C_e \Leftrightarrow E_{e(p)} = Q . ( p^2 . L_e + p . R_e + 1 / C_e ) \quad (AN-5)$$

pour le réseau électrique, et

$$F_{m(p)} = p^2 . M_m . X + p . R_m . X + X / C_m \Leftrightarrow F_{m(p)} = X . ( p^2 . M_m + p . R_m + 1 / C_m ) \quad (AN-6)$$

pour le réseau mécanique.

Sachant que dans un circuit électrique, l'intensité du courant,  $I$ , est la dérivée première de la quantité d'électricité  $Q$  par rapport au temps.

La formule liant la quantité d'électricité à l'intensité de courant  $dQ = I . dt$ ,

(AN-7)

permet d'écrire :

$$I = p . Q ,$$

(AN-8)

ou

$$Q = I / p ,$$

(AN-9)

ce qui permet la transformation de AN-5 sous la forme :

$$E_{e(p)} = (I/p) . ( p^2 . L_e + p . R_e + 1 / C_e ) \Leftrightarrow E_{e(p)} = I . ( p . L_e + R_e + 1 / p . C_e ) \quad (AN-10)$$

De même, dans un circuit mécanique, la vitesse  $V$  du déplacement est la dérivée première de l'espace parcouru  $X$  par rapport au temps ainsi

$$V = dX / dt \quad (AN-11)$$

En utilisant la variable  $p$

$$V = p . X \quad (AN-12)$$

ou

$$X = V / p \quad (AN-13)$$

qui permet la transformation de AN-6 soit:  $F_{m(p)} = (V/p) . ( p^2 . M_m + p . R_m + 1 / C_m ) \Leftrightarrow F_{m(p)} = V . ( p . M_m + R_m + 1 / p . C_m )$  (AN-14)

**Remarque:** L'emploi de l'opérateur  $p$  a facilité la transformation des équations.

L'écriture sous forme différentielle aurait amené à des changements de variables, qui n'auraient pas permis les factorisations de manière aussi simple.

Le rapprochement entre, AN-5 et AN-10 d'une part, et AN-6 et AN-14 d'autre part, met en évidence les analogies électro-mécaniques. Elles sont reportées dans le tableau suivant :

Réseau Mécanique				Réseau Electrique		
Grandeur	Symbole	Energie		Grandeur	Symbole	Energie
Force	$F_m$		<->	Force électro motrice	$E_e$	
Déplacement	$X$		<->	Quantité d'électricité	$Q$	
Vitesse	$V$		<->	Intensité de courant	$I$	
Masse	$M_m$	$M_m V^2 / 2$	<->	Inductance	$L_e$	$L_e I^2 / 2$
Résistance	$R_m$	$R_m V^2$	<->	Résistance	$R_e$	$R_e I^2$
Compliance	$C_m$	$X^2 / 2 . C_m$	<->	Capacitance	$C_e$	$U^2 / 2 . C_e$

## 2-2- Analogies mécano acoustiques

Une pression, exprimée en Pascals  $[M . L^{-1} . T^{-2}]$ , est le rapport d'une force mécanique sur une surface soit

$$P = F / S .$$

(AN-15)

A noter que la Force  $F = P . S$  peut être considérée comme un flux de pression.

Car le produit d'un champ de vecteur par une surface est appelé flux.

En soumettant la force précédente  $F_{m(p)}$  à un élément de surface  $S$  de l'ensemble mécanique, AN-14

$$F_{m(p)} / S = (V/S) . ( p . M_m + R_m + 1 / p . C_m )$$

(AN-16)

En première approximation, si  $S$  est en contact avec l'air , nous pouvons considérer qu'il s'agit d'un réseau acoustique.

En multipliant haut et bas le second terme de cette nouvelle équation, et en identifiant la pression,

$$P_a = ( V . S / S^2 ) . ( p . M_m + R_m + 1 / p . C_m )$$

(AN-17)

qui fait apparaître le flux de vitesse acoustique du circuit :  $V_a = V . S$

(AN-18)

Il s'exprime en  $m^3 / \text{seconde}$ .  $[L^3 . T^{-1}]$ . Il s'agit aussi d'un débit volumique, autrement dit le volume d'air qui traverse une surface en une seconde, autrement dit le débit d'air.

L'expression de la pression acoustique devient :

$$P_a = V_a . ( p . M_m / S^2 + R_m / S^2 + 1 / p . C_m . S^2 )$$

(AN-19)

Qui permet d'établir l'expression d'un réseau acoustique:

$$P_a = V_a . ( p . M_a + R_a + 1 / p . C_a )$$

(AN-20)

Dans laquelle on trouve :

- la masse ou inertance acoustique  $M_a = M_m / S^2$ , en  $kg / m^4$   $[M . L^{-4}]$ ,

(AN-21)

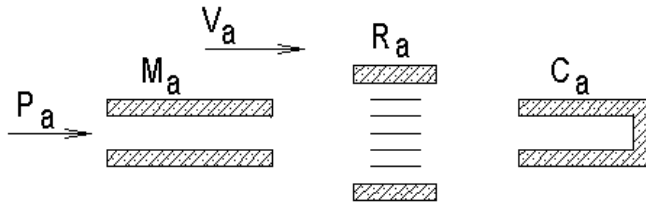
- la résistance acoustique  $R_a = R_m / S^2$ , en Ohm acoustique  $[M . L^{-4} . T^{-1}]$

(AN-22)

- la compliance acoustique  $C_a = C_m . S^2$ , exprimée en  $m^5 / \text{Newton}$   $[M^{-1} . L^4 . T^2]$ .

(AN-23)

La symbolique acoustique, peu pratique est :



#### Remarque-1 :

Le passage d'un réseau mécanique vers un réseau acoustique s'est effectué à travers et grâce à une surface.

#### Remarque-2 :

En développant,  $V_a = V \cdot S = S \cdot dX/dt$  soit  $V_a = p \cdot S \cdot X$

(AN-24)

Le produit  $S \cdot X$  représente un volume. Nous l'appelons  $V_b$  afin de bien le discerner, de la vitesse de déplacement  $V$ , et du flux de vitesse acoustique  $V_a$

$$V_a = p \cdot V_b$$

(AN-25)

Le tableau suivant récapitule les analogies entre les trois réseaux.

Réseau Mécanique		<->	Réseau Electrique		<->	Réseau Acoustique	
Grandeur	Symbole		Grandeur	Symbole		Grandeur	Symbole
Force	$F_m$	<->	Force électro motrice	$E_e$	<->	Pression	$P_a$
Déplacement	$X$	<->	Quantité d'électricité	$Q$	<->	Volume	$V_b$
Vitesse	$V$	<->	Intensité de courant	$I$	<->	Flux de vitesse	$V_a$
Masse	$M_m$	<->	Inductance	$L_e$	<->	Inductance	$M_a$
Résistance	$R_m$	<->	Résistance	$R_e$	<->	Résistance	$R_a$
Compliance	$C_m$	<->	Capacitance	$C_e$	<->	Compliance	$C_a$

**Remarque** Le flux d'accélération est important dans la modélisation d'un HP ou d'un microphone.

Nous pouvons le définir à partir de AN-24  $\Phi_a = p \cdot V_a$

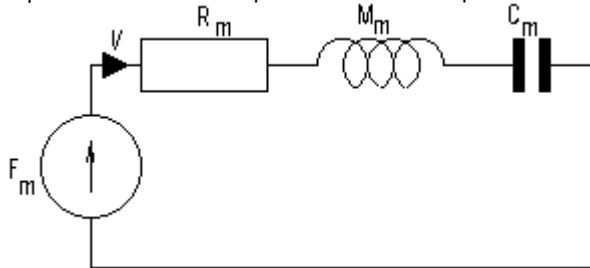
(AN-26)

et

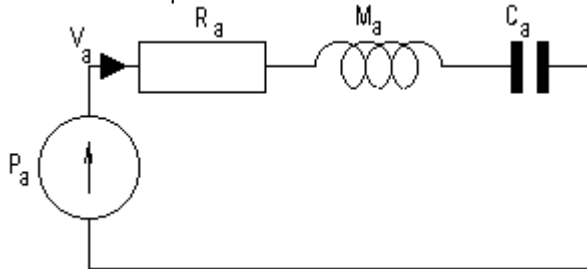
$$\Phi_a = p^2 \cdot S \cdot X$$

(AN-27)

La représentation schématique du réseau électrique est inchangée. Par contre le schéma du réseau mécanique est devenu



et le réseau acoustique



### 2-3- Impédances des circuits.

Elles sont faciles à mettre en évidence en partant du modèle électrique.

En partant de l'équation AN-10

$$Z_e = E_{e(p)} / I$$

(AN-28)

on déduit

$$Z_e = (p \cdot L_e + R_e + 1/p \cdot C_e)$$

(AN-29)

Elle est l'impédance électrique du circuit électrique qui charge le générateur électrique, Elle s'exprime en Ohms  $[M.L^2.T^{-1}.Q^{-2}]$ .

De même en partant de AN-14 et par analogie,  $Z_m = F_m / V$

(AN-30)

$$Z_m = (p \cdot M_m + R_m + 1/p \cdot C_m)$$

(AN-31)

Est l'impédance mécanique du circuit. Elle s'exprime en Ohms mécaniques ou en Newton seconde /mètre.

En substituant  $p$  par  $j \cdot \omega$  son équivalent complexe, dans laquelle :

$\omega$  est la pulsation en radians par seconde (rd/s)  $[T^{-1}]$

$$Z_m = (j \cdot \omega \cdot M_m + R_m + 1/j \cdot \omega \cdot C_m)$$

(AN-32)

$$\text{ou, } Z_m = (j \cdot \omega \cdot M_m + R_m - j/\omega \cdot C_m)$$

(AN-33)

Il apparaît clairement les réactances.

- de  $M_m$ ,

$$X_{Mm} = M_m \cdot \omega$$

(AN-34)

- de  $C_m$

$$X_{Cm} = 1/C_m \cdot \omega$$

(AN-35)

Une factorisation de  $j$  dans **AN-31**

$$Z_m = R_m + j.(M_m.\omega - 1/C_m.\omega) \quad (\text{AN-36})$$

soit

$$Z_m = R_m + j.X_m, \quad (\text{AN-37})$$

met en évidence la réactance totale de l'impédance du circuit mécanique.

$$X_{mt} = M_m.\omega - 1/C_m.\omega = X_{Mm} - X_{cm} \quad (\text{AN-38})$$

Le même procédé est utilisé dans le circuit acoustique. De **AN-20**

$$Z_a = P_a / V_a \quad (\text{AN-39})$$

C'est l'impédance acoustique du circuit acoustique. Elle est le quotient complexe de la pression acoustique  $P_a$  supposée uniforme sur toute la surface  $S$ , par le flux de vitesse  $V_a$  engendré

$$Z_a = (p.M_a + R_a + 1/p.C_a) \quad (\text{AN-40})$$

et ainsi:

$$Z_a = (j.\omega.M_a + R_a - j/\omega.C_a). \quad (\text{AN-41})$$

La réactance de la masse acoustique est :  $X_{Ma} = M_a.\omega$ ,

et celle de la compliance :

$$X_{Ca} = 1/C_a.\omega, \quad (\text{AN-43})$$

Et la réactance acoustique totale de l'impédance du circuit acoustique.

$$X_{at} = M_a.\omega - 1/(C_a.\omega) = X_{Ma} - X_{ca} \quad (\text{AN-44})$$

## 2-4- Conséquences

En nous référant à un circuit électrique, les lois, de ce type de réseau, d'OHM, de KIRCHOFF, de THEVENIN, de NORTON, etc., sont applicables aux réseaux mécaniques et acoustiques.

Nous pourrions trouver des analogies à tous les réseaux, soumis et réactifs à des variations. (température par exemple),

La connaissance des analogies permet l'étude d'un système, dans un milieu autre que celui duquel il est originaire. C'est le cas typique d'une suspension automobile, préalablement évaluée grâce à un circuit électrique analogue.